Réflexions sur les fondements des mathématiques, à la lumière de l'informatique

Davide Barbarossa

Dipartimento di Informatica,
Università di Bologna (Italie)

davide.barbarossa@unibo.it

https://lipn.univ-paris13.fr/~barbarossa/index.html

Journée interdisciplinaire "Logique, Langage et Computation : Autour de la logique linéaire et ses interfaces"

10/11/2023

Lyon, France

RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un savoir-faire, que j'oppose à un savoir.
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.
Le savoir est, à chaque époque, le discours, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs]

RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un savoir-faire, que j'oppose à un savoir.
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.
Le savoir est, à chaque époque, le discours, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, 14ème conférence de l'Université de tous les savoirs

MATHS (Kevin Buzzard, XenaProject)

- Enoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un savoir-faire, que j'oppose à un savoir.
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.
Le savoir est, à chaque époque, le discours, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, 14ème conférence de l'Université de tous les savoirs

MATHS (Kevin Buzzard, XenaProject)

- Enoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE

- Étude du langage et du raisonnement

RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un savoir-faire, que j'oppose à un savoir.
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.
Le savoir est, à chaque époque, le discours, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, 14ème conférence de l'Université de tous les savoirs

MATHS (Kevin Buzzard, XenaProject)

- Enoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un savoir-faire, que j'oppose à un savoir.
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.
Le savoir est, à chaque époque, le discours, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs]

MATHS (Kevin Buzzard, [XenaProject])

- Enoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

On a besoin d'un FORMAT pour representer le langege et le raisonnement !

RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"Les mathématiques sont un savoir-faire, que j'oppose à un savoir.
Un savoir-faire ça se transmet, c'est un geste détaché de toute affectivité.
Le savoir est, à chaque époque, le discours, l'idéologie, que l'on fait autour du savoir-faire."

Pierre Cartier, 14ème conférence de l'Université de tous les savoirs

MATHS (Kevin Buzzard, XenaProject)

- Enoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

LOGIQUE TRANSCENDENTALE

- Étude philosophique des concepts, objets, intuitions mathématiques

On a besoin d'un FORMAT pour representer le langege et le raisonnement !

RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, À LA LUMIÈRE DE L'INFORMATIQUE

"I am not here insisting on the exigency of «foundations» as locus of certainty, but rather on the necessity of the analysis of conceptual and cognitive roots, of structures of sense as correlations, tracing their constitutive and historical path [...]."

Giuseppe Longo, 2015, Reflexions sur "Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics" de F. Zalamea

MATHS (Kevin Buzzard, XenaProject)

- Enoncés vrais/faux
- Preuves
- Définitions
- Idées

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

- Étude mathématique du langage et du raisonnement mathématique

On a besoin d'un FORMAT pour representer le langege et le raisonnement !

LOGIQUE TRANSCENDENTALE

- Étude philosophique des concepts, objets, intuitions mathématiques

ORGANISATION DU CADRE FONDATIONNEL DES MATHÉMATIQUES

LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

"Je ne parle pas de la pensée, je parle de sa trace formelle;
je ne parle pas de la vie, je parle de l'etat civil."

Jean-Yves Girard, [séminaire_mamuphi2005]

ORGANISATION DU CADRE FONDATIONNEL DES MATHÉMATIQUES

LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

"Je ne parle pas de la pensée, je parle de sa trace formelle;
je ne parle pas de la vie, je parle de l'etat civil."

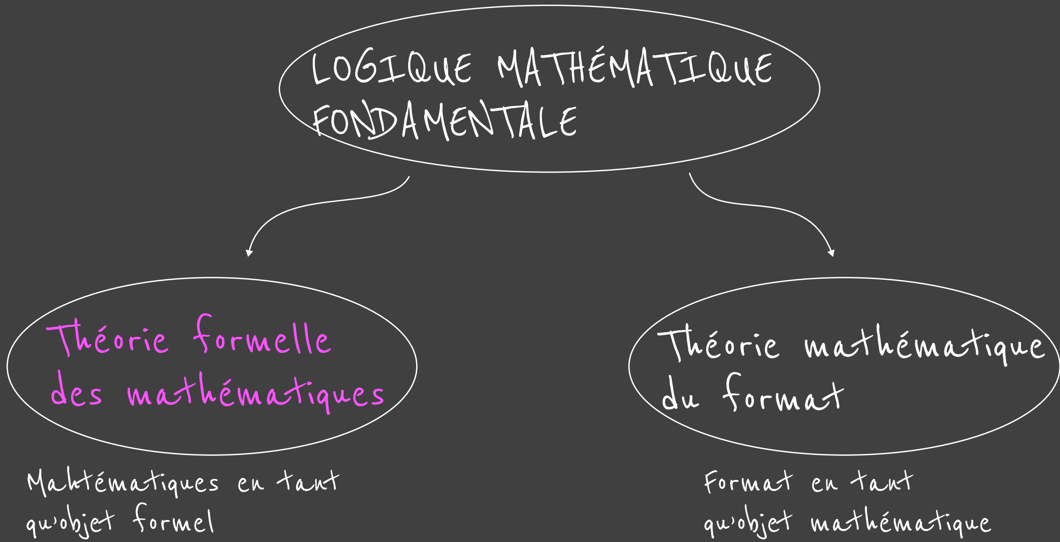
Jean-Yves Girard, séminaire_mamuphi2005

PB: Comment choisir le format ?
Il faut assumer une thèse "à la Church" qui justifie le choix.

LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE

Théorie formelle des mathématiques

Théorie mathématique du format


LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE
Théorie formelle des mathématiques
Théorie mathématique du format
Mahtématiques en tant qu'objet formel
Format en tant qu'objet mathématique

THÉORIE FORMELLE DES MATHÉMATIQUES

- Théorie des Modèles et Théories des Ensembles (*)
- Mahématiques à Rebours
- Théories des Types
- Assistants à la Preuve
- . . .

(*) historiquemet, ça commence par là

Théories des Ensembles VS Théorie de Types ?

"What's even worse, is that in theory the set M could genuinely represent more than one mathematical object. Perhaps somebody writing the library on natural numbers decided to define 3 to be the set {0, 1, 2}, and more generally they defined n to be the set {0, 1, 2, . . . , n − 1}. Then someone doing topology defined a topology on a set X to be a set of subsets of X satisfying some axioms. It then turns out that 3 is a topology on 2 (check it! It's really true!)."

Kevin Buzzard, 2020, [xenaproject]

Théories des Ensembles VS Théorie de Types ?

"This encoding seems to be not very different than the insight that all structures in computing can be represented as a sequence of 0's and 1's. Indeed, it seems to me that set theory is something like the machine language of mathematics, but it doesn't share the redeeming feature that in computing we need to translate everything in machine language. Mathematics which is a construction of our mind doesn't need a machine language it should rather reflect our basic intuition."

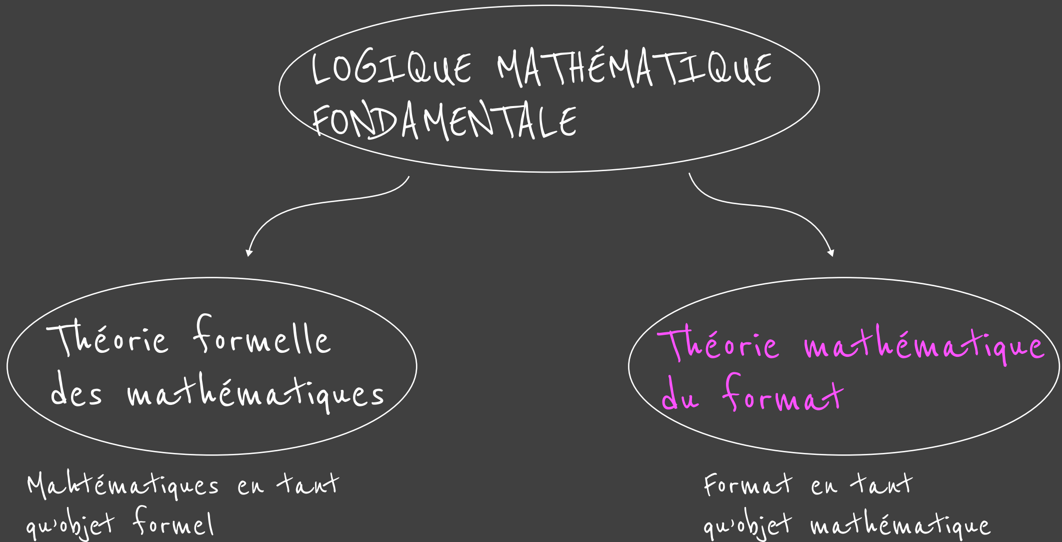
Thorsten Altenkirch, 2023, [Should Type Theory replace Set Theory as the Foundation of Mathematics?]

THÉORIE FORMELLE DES MATHÉMATIQUES

Théories des Ensembles VS Théorie de Types ?

"[...] moving rather far from the foundational issues, as much as set theorists have understood the privileged position of the subject as regards to its ability to formulate mathematics, many in general consider that the subject of foundations is not worth pursuing and are much more interested in the mathematics of infinity. [...] Therefore, not only the working set theorists of today do not see themselves as providing the unique ontological foundation of mathematics, but they do not believe in such a unique foundation and do not claim it even for their own subject."

Mirna Džamonja, 2017, [Set theory and its place in the foundations of mathematics]


LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE
Théorie formelle des mathématiques
Théorie mathématique du format
Mahtématiques en tant qu'objet formel
Format en tant qu'objet mathématique

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

- Depuis l'écriture des Éléments d'Euclide (et même avant), la géométrie cherchait à rendre compte de l'espace environnant, à travers la formalisation et l'axiomatisation de la géométrie euclidienne en dimensions 2 ou 3. Le xixe siècle a connu un épanouissement des mathématiques et en particulier de la géométrie. En réponse à la question de l'indépendance des axiomes d'Euclide, et aussi pour des raisons pratiques, de nouvelles géométries furent introduites […]. À l'époque, on voyait ces géométries non pas comme une palette d'outils mais plutôt comme des modèles fondamentaux répondant à une collection d'axiomes desquels les résultats géométriques devaient se déduire. […] Le sien [de Felix Klein] est une remise en question de cette vision traditionnelle. Son idée est d'appuyer la géométrie sur la théorie des groupes, et de placer le concept de symétrie (ou transformation) au centre de la géométrie.

- L'objectif est de comparer les différentes géométries apparues au cours du xixe siècle pour en dégager les points de similitude […] Ce programme apparut comme une remise en question de la géométrie et influa très fortement sur son développement et son évolution.

- Il s'agit moins d'une définition que d'une recherche d'esthétique.

Wikipédia_Programme_d'Erlangen

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

Reinterpretations d'idées de J.-Y. Girard

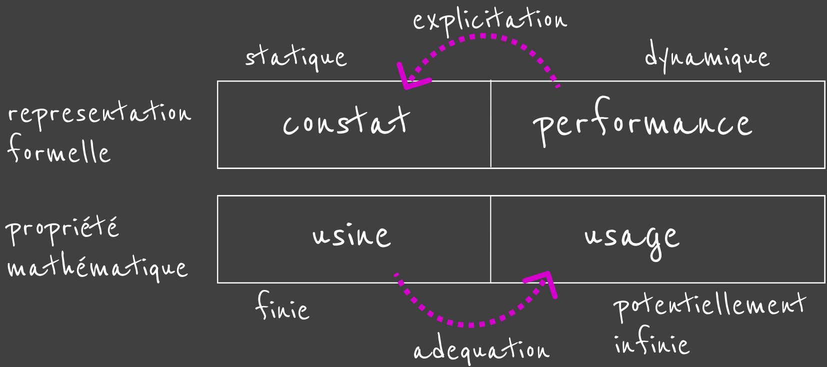
Historiquement ça vient de la découverte du contenu calculatoire des preuves;
Aujourd'hui il s'agit essentiellement d'une théorie informatique du format

- -1: le format en tant que representation d'un objet réel — Modèles à la Tarski
- -2: le format en tant que objet informatique — BHK, Curry-Howard-Lambek
- -3: le format en tant que pure objet intéractif — LL, Réalisabilités, Sémantiques des jeux, GoI,...

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

Reinterpretations d'idées de J.-Y. Girard

On s'intéresse aux aspects suivants des objets de la logique mathématique :



THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

On s'intéresse aux aspects suivants d'un langage de programmation :

Problème de l'arrêt

	statique	dynamique
representation formelle	valeurs	sémantique opérationnelle
propriété mathématique	typage	sémantique dénotationnelle
	finie	potentiellement infinie

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

On s'intéresse aux aspects suivants des résaux de preuves de MLL :

	statique	dynamique
representation formelle	réseaux normaux	élimination des coupures
propriété mathématique	critère de correction	terminaison
	finie	potentiellement infinie

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU FORMAT

On s'intéresse aux aspects suivants de la notion "A implique B" :

	statique	dynamique	
representation formelle	$\vdash A \to B$	$A \vdash B$	CALCUL DES SEQUENTS
propriété mathématique	$\pi : A \vdash B$	pour tout $\rho : \vdash A$, $cut(\rho,\pi)$ termine	
	finie	potentiellement infinie	

Hauptsatz

	statique	dynamique	
representation formelle	$A \vdash B$	$\vdash A \to B$	DÉDUCTION NATURELE
propriété mathématique	$x : A \vdash \pi : B$	pour tout $\rho : \vdash A$, $\vdash (\lambda x.\pi)\rho : B$ termine	
	finie	potentiellement infinie	

Hauptsatz

ORGANISATION DU CADRE FONDATIONNEL DES MATHÉMATIQUES

LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

"Je ne parle pas de la pensée, je parle de sa trace formelle;
je ne parle pas de la vie, je parle de l'etat civil."

Jean-Yves Girard, [séminaire_mamuphi2005]

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

"[...] the task of [Husserl's] transcendental logic is to examine the conditions of possibility of its objectivity, that is, it examines how it has been constituted in its objectivity."

Mirja H. Hartimo, [Formal and Transcendental Logic]

"[...] we are not interested in an ontology of the "transcendence" of mathematical objects, but rather in their "transcendental constitution", as the phenomenologist would have it – that is, their constituting through [...] the praxis of life and knowledge internal to mathematics and often [...] located in the interface with other forms of knowledge."

Giuseppe Longo, [Reflexions] sur
"Synthetic Philosophy of Contemporary" Mathematics" de F. Zalamea

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

Esquisse

Construction transcendetale Kantienne des maths :

- On peux identifier les formes transcendentales de l'entendement (mathématique) avec les règles logique. Plus nécessaires mais seulement sufficientes.
- Concepts mathématiques viennent d'une abstraction de l'experience (pense à l'ensemble vide).
- On applique ces formes transcendentales à ces abstraction.

PB: justifier en quoi cette activité diffère de la métaphysique...

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

Esquisse

PB: justifier en quoi cette activité diffère de la métaphysique

SOL: revisiter le schémtisme transcendentale kantien

Schématiser ~ Programmer dans un assistant de preuve

Les maths ne sont pas de la métaphysique que grâce à cela.

"Science is what we understand well enough to explain to a computer.
Art is everything else we do."

D. Knuth, Foreword to the book [A=B]

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

Sur le choix des axiomes

Mathématiques pratique (le savoir-faire) = altérnance en boucle de :
moment synthétique; moment analytique

PB: comment choisir ses nouveaux axiomes ? SOL: ça dépend de l'utilité !

Position du "as-ifm" de E. Landray, 2023, [Mathematics: Method Without Metaphysics]

"Proving the undecidability of a statement is not a certificate of principled human fallibility, but a deep insight into the existence of several distinct differentiations of some structure. It is not a fundamental limit to what we can know, but a precious piece of knowledge about a non-property of the structure that we have discovered."

M. Müller, 2021, [Undecidability and unpredictability: not limitations, but triumphs of science]

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

Sur la vérité des axiomes

Des formules indécidables célèbres:

- Tiers-Exlu dans la logique intuitionniste
- L'induction dans l'arithmétique de Robinson
- Euclide V dans les autres axiomes d'Euclide
- L'axiome de l'infini dans Z sauf l'infini
- C dans ZF
- CH dans ZFC
- Univalence dans HoTT

On dit que certains axiomes sont "vrais" au sens où ils représentent des abstractions de certains aspects de notre expérience.

Cela n'a pas de rapport avec une supposée vérité d'un supposé objet.

"Chercher à savoir si CH est vraie ou fausse relève de la discussion sur le sexe des anges. Le seul véritable (et fort difficile) problème est celui-ci : écrire un programme qui corresponde à CH et comprendre ce qu'il fait."

J.-L. Krivine, A propos de la chauve-souris et autres conte

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

Sur la réalité des objets mathématiques

Je propose une allégorie de la caverne inversée:

Du point de vue épistémologique, ce n'est pas la formalisation d'un objet mathématique qui est sa representation; c'est l'objet mathématique qui est une métaphore du formel.

> "La plupart des objets dont les mathématiques parlent sont des fictions. Elles sont très utiles, elles permettent un décrochage par rapport à la réalité. Un voyage dans l'imaginaire, dans l'abstrait, qui ensuite permet de revenir dans le concret, mais beaucoup plus loin."

Pierre Cartier, [14ème conférence de l'Université de tous les savoirs]

À ne pas oublier:
pas n'importe quelle fiction, mais qu'une qui peut être schématisée !

LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE

Sur la réalité des objets mathématiques

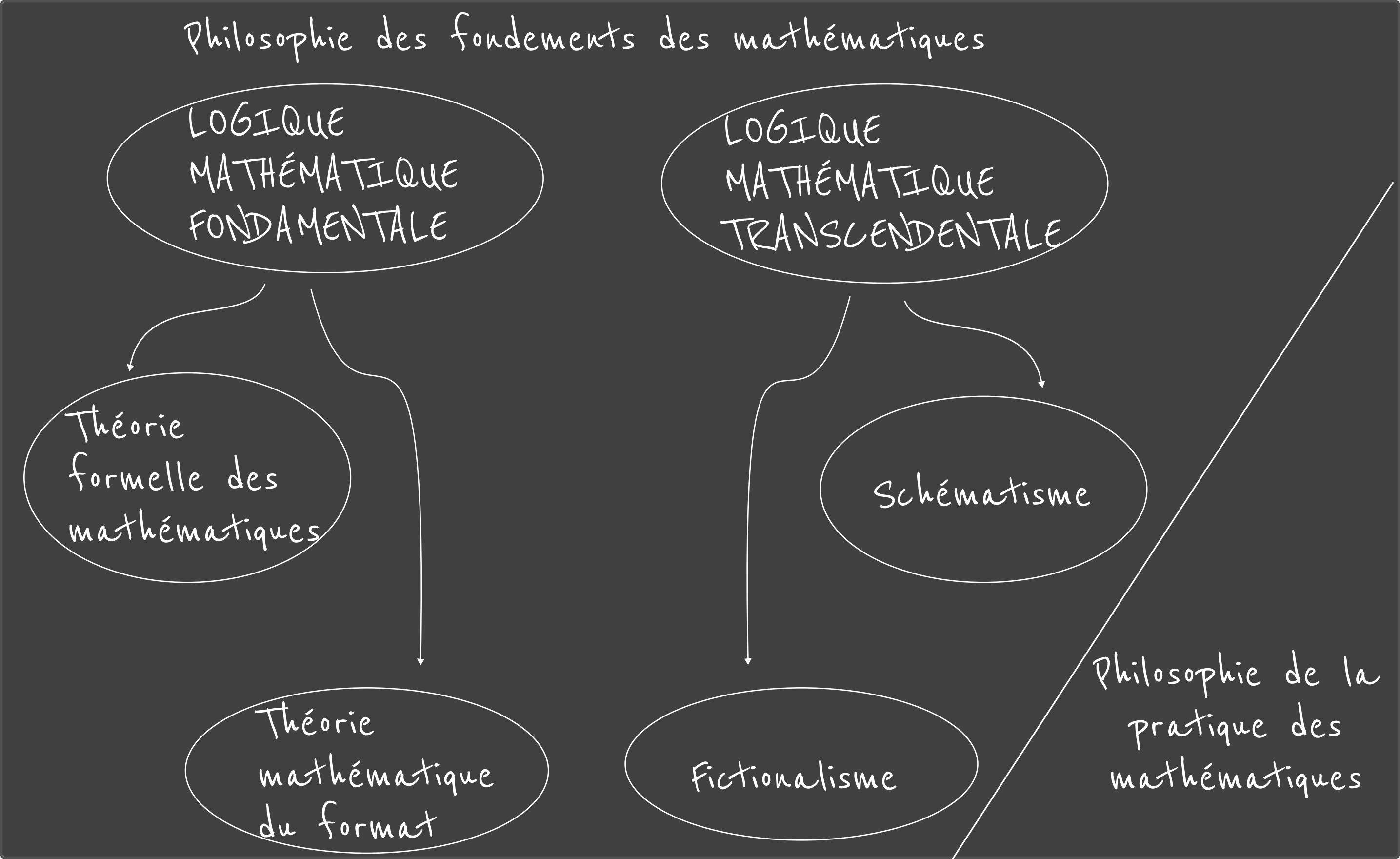
Une position transcenentale devrait nous permettre de trancher sur la vieille question ontologique/épistémologique:

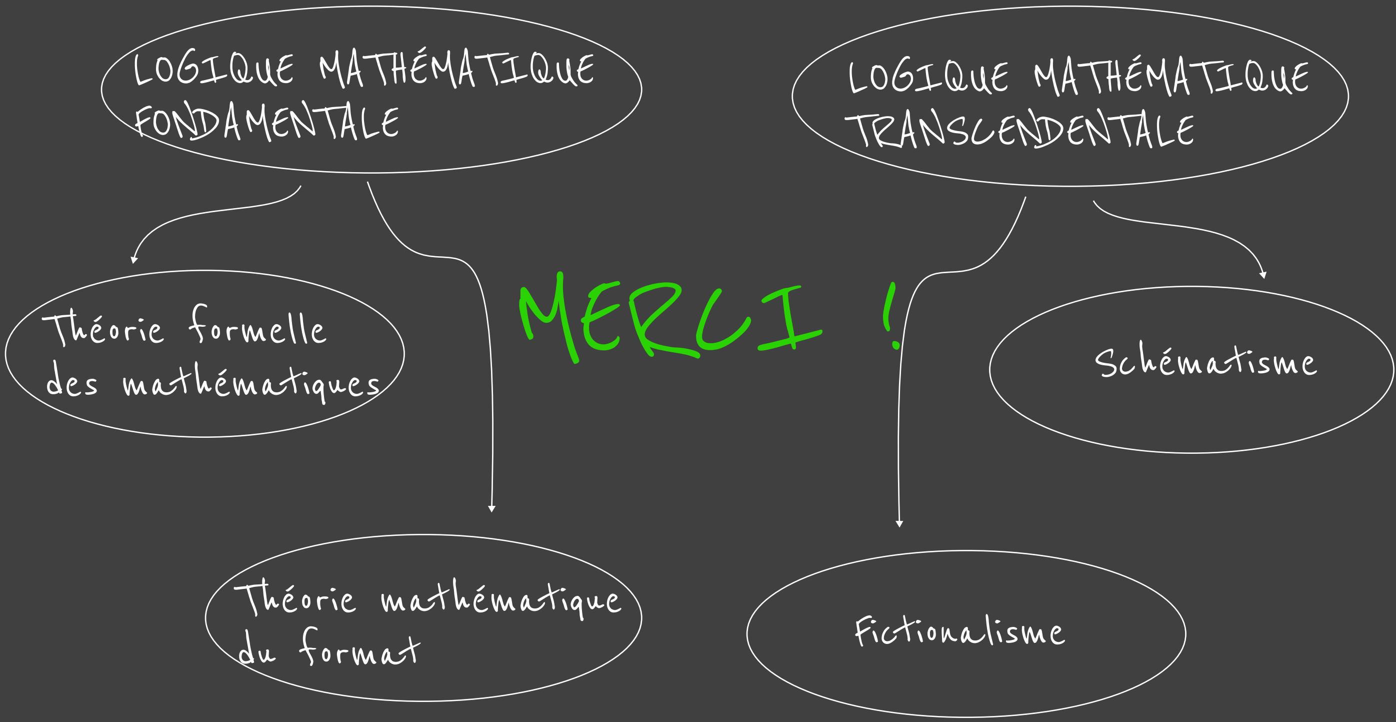
Réalisme ?

- Non (déjà Benacerraf);
- Cependant, les maths usuelles sont faites sous l'hypothèse que les objets soient donnée dans le monde réel (d'où le tiers-exclu de la théorie des modèles): "soit G un groupe donné..."

Intuitionisme ?

- Oui si au sens de construction mentale transcendentale;
- Cependant, pas forcement de constructivisme.


Philosophie des fondements des mathématiques
LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE
LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE
Théorie formelle des mathématiques
Schématisme
Théorie mathématique du format
Fictionalisme
Philosophie de la pratique des mathématiques


LOGIQUE MATHÉMATIQUE FONDAMENTALE
LOGIQUE MATHÉMATIQUE TRANSCENDENTALE
Théorie formelle des mathématiques
Théorie mathématique du format
MERCI !
Schématisme
Fictionalisme